CONCOURS ESTP - ENSAM

d'admission à :

L'ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ARTS ET MÉTIERS

- Banque de notes ECRIN et ISEP -

SESSION 1998

Filière MP

Durée : 4 heures

MATHÉMATIQUES 3

PROBLEME 1

Soit E un espace euclidien de dimension n. Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $(x|y)$ et la norme euclidienne associée est définie par $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Si f est un endomorphisme de E tel que $f^2 = f \circ f \neq 0$, on pose :

$$K(f) = \sup_{x \notin Ker\, f^2} \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\| \|f^2(x)\|} \quad ; \quad K(f) \in R \cup \{+\infty\} .$$

On rappelle que la norme d'un endomorphisme h d'un espace euclidien est définie par : $N(h) = \sup_{\|x\| \leq 1} \|h(x)\|$.

1 a] Soit f une isométrie de E. Calculer $K(f)$.

b] On suppose ici que $n = 2$ et que la matrice de f dans une base orthonormée de E est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Calculer $K(f)$.

c] Montrer que si f est un automorphisme de E, $K(f) = K(f^{-1})$.

2 Soit f un endomorphisme autoadjoint de E.

a] Montrer que $Ker\ f = Ker\ f^2$.
b] Si $f \neq 0$, calculer $K(f)$.

3 Soit f un endomorphisme de E .

a] Montrer que $E = Ker\ f \oplus Im\ f$ si et seulement si $Ker\ f = Ker\ f^2$.
On note alors g l'endomorphisme de $Im\ f$ induit par f.
Montrer que g est bijectif.

b] On suppose $f^2 \neq 0$.
Montrer que $K(f) \in \mathrm{R}$ si et seulement si $Ker\ f = Ker\ f^2$ et que dans ce cas $K(f) \leq N(f)\, N(g^{-1})$.

4 Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 \neq 0$. Montrer que $K(f) \geq 1$.

5 Soit f un endomorphisme de E et f^* son adjoint.

a] Montrer que $f^* \circ f$ est un endomorphisme autoadjoint positif.
b] Soit λ la plus grande valeur propre de $f^* \circ f$. Montre que $N(f) = \sqrt{\lambda}$.

6 On suppose dans cette question que $dim\ E = 2$ et que f est un endomorphisme de E vérifiant : $f^2 \neq 0$ et $dim\ Ker\ f = 1$.

a] Montrer que : $Ker\ f = Ker\ f^2$.

b] Montrer que f admet deux valeurs propres réelles distinctes dont l'une est nulle.

c] Soit μ la valeur propre non nulle de f . Montrer que $K(f) = \dfrac{N(f)}{|\mu|}$.

d] On suppose que la matrice de f dans une base orthonormée de E est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b+k & 1 \end{pmatrix}, \text{ où } b \in R\ ,\ k \in R\ ,\ 1 - b(b+k) = 0\ .$$

Vérifier que $f^2 \neq 0$ et que $dim\ Ker\ f = 1$. Calculer $N(f)$ et $K(f)$.

7 Soit g un endomorphisme autoadjoint positif de E . Montrer qu'il existe un endomorphisme autoadjoint positif h tel que $g = h^2$.

8 Soit f un automorphisme de E.

a] Montrer qu'il existe une isométrie u et un endomorphisme autoadjoint défini positif s tels que : $f = u \circ s$.

b] On suppose que $f \circ f^* = f^* \circ f$, où f^* est l'adjoint de f .

Montrer que $u \circ s = s \circ u$ et calculer $K(f)$.

On pourra montrer que $u \circ s^2 = s^2 \circ u$, puis montrer que u laisse stables les sous-espaces propres de s .

PROBLEME 2

Soit E l'espace vectoriel sur R des applications f continues de $[0,+\infty[$ dans R vérifiant : $\forall a > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \left[e^{-at} f(t) \right] = 0$.

On note E_1 le sous ensemble de E formé par les applications f de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$ et telles que f' et f'' appartiennent à E.

1 Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E.

2 Montrer que : $\forall x > 0$, $\forall f \in E$, $t \to f(t) e^{-xt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

3 Montrer que la fonction g définie par : $\forall t > 0$, $g(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ et $g(0) = 1$, appartient à E_1.

4 Si $f \in E$, on note $L(f) = F$ avec $\forall x > 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} \, dt$.

Montrer que $\forall f \in E_1$, $\forall x > 0$:

$$L(f')(x) = -f(0) + x L(f)(x)$$

$$L(f'')(x) = -f'(0) - x f(0) + x^2 L(f)(x).$$

5 Soit $\sum a_n t^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R > 0$.

On pose $\rho = \dfrac{1}{R}$ si $R \neq +\infty$ et $\rho = 0$ si $R = +\infty$.

a) Montrer que $\forall t \in R$ la série $\sum \frac{a_n t^n}{n!}$ converge.

On note, $\forall t \in R$, $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!}$.

b) Montrer que $\forall x > \rho$, $t \to f(t)\, e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$

et que $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}}$.

c) Calculer, $\forall x > 1$, $L(g)(x)$, g étant la fonction définie au 3°).

d) On note ψ la fonction définie par :

$$\forall t > 0, \quad \psi(t) = \frac{\cos t}{t^2} - \frac{\sin t}{t^3} \quad \text{et} \quad \psi(0) = -\frac{1}{3}.$$

Montrer que $\psi \in E$ et calculer, pour tout $x > 1$: $\int_0^{+\infty} \psi(t)\, e^{-xt}\, dt$.

6) Soit $x > 0$. On note f_x la fonction définie par $\begin{cases} f_x(t) = \dfrac{e^{-\frac{x}{t}}}{\sqrt{t}} & \text{si } t > 0 \\ f_x(0) = 0. \end{cases}$

a) Montrer que $f_x \in E$.

Soit $b > 0$. On note I l'application de $]0, +\infty[$ dans R définie par :
$I(x) = L(f_x)(b)$.

b) Montrer que I est une application continue sur $]0, +\infty[$, admettant un prolongement continu sur $[0, +\infty[$, noté encore I.

c) Calculer $I(0)$. (On admet que : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

d) Montrer que I est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$,

$$I'(x) = -\sqrt{\frac{b}{x}}\, I(x).$$

e) En déduire $I(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$.